

I. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона.

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариантов и соответствующих им частот:

$$x_i \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N$$

$$n_i \quad n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_N$$

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена нормально.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности надо:

1. Вычислить непосредственно (при малом числе наблюдений) или упрощенным методом (при большом числе наблюдений), например методом произведений или сумм выборочную среднюю $\bar{x}_g$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_g

2. Вычислить теоретические частоты

$$n_i = \frac{n \cdot h}{\sigma_g} \cdot \varphi(U_i), \quad \text{где}$$

n – объем выборки (сумма всех частот),

h – шаг (разность между двумя соседними вариантами),

$$U_i = \frac{x_i - \bar{x}_g}{\sigma_g};$$

$$\varphi(U_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{U_i^2}{2}};$$

3. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

1. составить расчетную таблицу, по которой определить наблюдаемое значение критерия

$$\chi_{\text{набл}}^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i};$$

2. по таблице критических точек распределения χ^2 , по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = S - 3$ (S – число групп выборки) найти критическую точку $\chi_{\text{кр}}^2(\alpha; k)$ правосторонней критической области.

Если $\chi_{\text{кр}}^2 > \chi_{\text{набл}}^2$ нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении генеральной совокупности.

Если $\chi_{\text{кр}}^2 < \chi_{\text{набл}}^2$ – гипотезу отвергают.

II. Проверка гипотезы о показательном распределении генеральной совокупности

Задано эмпирическое распределение непрерывной случайной величины X в виде последовательности интервалов $x_i - x_{i+1}$ и соответствующих им частот n_i , причем $\sum n_i = n$ (объем выборки).

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что случайная величина X имеет показательное распределение.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о том, что непрерывная случайная величина распределена по показательному закону надо:

- 1 Найти по заданному эмпирическому распределению выборочную среднюю $\bar{x}_g$. Для этого, приняв в качестве «представителя» i -го интервала его середину $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, составляют последовательность равноотстоящих вариантов и соответствующих им частот.
- 2 Принять в качестве оценки параметра λ показательного распределения величину, обратную выборочной средней

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}_g}$$

- 3 Найти вероятность попадания X в частичные интервалы (x_i, x_{i+1}) по формуле

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}};$$

- 4 Вычислить теоретические частоты

$$n'_i = n \cdot P_i, \text{ где } n = \sum n_i, - \text{объем выборки}$$

- 5 Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k=S-2$, где S -число первоначальных критериев выборки.

III. Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.

Задано эмпирическое распределение дискретной случайной величины X .

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу распределения генеральной совокупности по закону Пуассона.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о том, что случайная величина распределена по закону Пуассона надо:

- 1 Найти по заданному эмпирическому распределению выборочную среднюю $\bar{x}_g$.
- 2 Принять в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю

$$\lambda = \bar{x}_g$$

- 3 Найти по формуле Пуассона (или по готовым таблицам) вероятности P_i появления ровно i событий в n испытаниях ($i=0,1,2,\dots,r$, где r - максимальное число наблюдавшихся событий, n - объем выборки).
- 4 Найти теоретические частоты по формуле

$$n'_i = n \cdot P_i,$$

- 5 Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k=S-2$, где S -число первоначальных критериев выборки.

Задачи к лабораторному практикуму.

- Используя критерий Пирсона при уровне значимости $\alpha=0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n=200$.

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

таблица 1

i	x_i	$U_i = \frac{x_i - \bar{x}_g}{\sigma_g}$	$\varphi(U_i)$	n'_i
1	5			
2	7			
3	9			
4	11			
5	13			
6	15			
7	17			
8	19			
9	21			
Σ				

$$\begin{aligned}\bar{x}_g &= \\ \sigma_g &= \end{aligned}$$

таблица 2

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

$$\begin{aligned}\chi^2_{\text{набл}} &= \\ \chi^2_{\text{кр}} &= \end{aligned}$$

По таблице критических точек распределения $\chi^2_{\text{кр}}$ (приложение 1) и по заданному уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k =$ найдем критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}$ правосторонней критической области: $\chi^2_{\text{кр}} =$

Вывод:

2. В результате испытания 200 элементов на длительность работы получено эмпирическое распределение, приведенное в таблице 1 (в первом столбце – интервалы времени в часах, во втором столбце – частоты, т.е. количество элементов, проработавших время в пределах соответствующего интервала). Требуется, при уровне значимости $\alpha=0,05$ проверить, гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону.

Таблица 1 – Эмпирическое распределение

$x_i - x_{i+1}$	n_i
0-5	133
5-10	45
10-15	15
15-20	4
20-25	2
25-30	1

Решение

Таблица 2 – расчетная таблица

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	133				
2	45				
3	15				
4	4				
5	2				
6	1				
Σ				$\chi^2_{набл}$	
				$\chi^2_{кр}$	

$$\bar{x}_6 =$$

$$\lambda =$$

По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 1), по заданному уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k =$ найдем критическую точку $\chi^2_{кр}$ правосторонней критической области: $\chi^2_{кр} =$

Вывод

3. Отдел технического контроля проверил $n=200$ партий одинаковых изделий и получил следующее эмпирическое распределение (в первой строке $-x_i$ - количество нестандартных изделий в партии; во второй строке $-n_i$ - частота - количество партий содержащих x_i нестандартных изделий)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	116	56	22	2	4

Требуется, при уровне значимости $\alpha=0,05$ проверить, гипотезу о том, что число нестандартных изделий X распределено по закону Пуассона.

Решение

i	n_i	P_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
0						
1						
2						
3						
4						
Σ					$\chi^2_{набл}$	

$$\bar{x}_s =$$

$$\lambda =$$

По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 1), по заданному уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k =$ найдем критическую точку $\chi^2_{кр}$ правосторонней критической области: $\chi^2_{кр} =$

Вывод